261

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples et applications.

III.1 [Bale]

Soit $(\Omega; \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(E; \mathcal{B})$ espace probabilisable, $X : \Omega \to E$ variable aléatoire.

I] Loi de variables aléatoires

1] Notion de loi : cas discret et cas à densité

Définition 1 : On appelle loi (ou loi de probabilité) de X la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X définie par :
$\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B)$

Exemple 2 : δ_x est la mesure de probabilité de la variable aléatoire constante égale à x.

Définition 3 : On dit que la loi de X est discrète si : $\mathbb{P}_X$ est combinaison linéaire au plus dénombrable de mesures de Dirac : $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_{x_i}$ avec $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Proposition 4 : Les lois discrètes usuelles sont :
(1) Loi uniforme discrète : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a} \delta_k$
(2) Loi de Bernoulli : $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$
(3) Loi binomiale : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$
(4) Loi géométrique : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \, \delta_k$
(5) Loi de Poisson : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k$

Définition 5 : Soit $\mu; \nu$ deux mesures sur Ω. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ si :
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. On note $\nu \ll \mu$.

Théorème 6 : (de Radon-Nikodym) Soit $\mu; \nu$ deux mesures σ-finies telles que $\nu \ll \mu$.
Alors : il existe f fonction mesurable positive telle que :
$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Définition 7 : On dit que la loi de X est à densité si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et f est appelée la densité de f.

Proposition 8 : Les lois à densité usuelles sont :
(1) Loi uniforme de densité $\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}$
(2) Loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$
(3) Loi normale de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

2] Espérance de variable aléatoire

III.4 [Bale]

Définition 9 : Si X est intégrable par $\mathbb{P}$, alors on appelle espérance de X : $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_{X(\Omega)} x \, d\mathbb{P}_X(x)$

Théorème 10 : (de transport) Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne.
Alors : $\Phi(X) \in L^1(\Omega)$ ssi $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$
Dans ce cas, $\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_\Omega \Phi \circ X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$

Remarque 11 : Ce théorème permet de calculer $\mathbb{E}[\Phi(X)]$ sans connaître la loi de $\Phi(X)$.

Corollaire 12 : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$

Proposition 13 : Les espérances des lois usuelles sont $\frac{a+b}{2}$ pour l'uniforme, p pour $\mathcal{B}(1;p)$, np pour $\mathcal{B}(n;p)$; λ pour $\mathcal{P}(\lambda)$; $\frac{a+b}{2}$ pour $\mathcal{U}([a;b])$; $\frac{1}{\lambda}$ pour $\mathcal{E}(\lambda)$ et m pour $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$

Proposition 14 : (1) (Inégalité de Jensen) Si Φ est convexe sur $\mathbb{R}$, si X est une v.a. réelle telle que X et $\Phi(X)$ sont intégrables, alors : $\Phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X)]$
(2) (Inégalité de Hölder) Si $X \in L^p$, $Y \in L^q$, $p, q \in [1;+\infty[$ tq : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors : $XY \in L^1$ et $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$

II] Caractérisations par des fonctions

1] Fonctions de répartition

On suppose par la suite que X est à valeurs réelles.

Définition 15 : La fonction de répartition de X est :

$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

III.2 [Bale]

Propriété 16 : Une fonction de répartition vérifie :

(1) $0 \leq F \leq 1$

(2) F est croissante, continue à droite avec limite à gauche en tout point (CADLAG)

(3) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$

Réciproquement, toute fonction vérifiant ces 3 points est la fonction de répartition d'une v.a. réelle.

Proposition 17 : La fonction de répartition de X caractérise sa loi i.e. $F_X = F_Y$ ssi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Exemples 18 : (1) Pour $\theta > 0$, $F(t) = (1 - e^{-\theta t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ est la fonction de répartition de $\mathcal{E}(\theta)$

(2) $F(x) = \mathbb{1}_{[x;+\infty[}(x)$ est la fonction de répartition de δ_x

Proposition 19 : Si X est à densité f,

Alors : $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, d\lambda(x)$, F est dérivable presque partout et $F' = f$.

Exemple 20 : Pour $X \sim \mathcal{U}([0;1])$, $F(x) = x \mathbb{1}_{[0;1]}(x) + \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x)$

2] Fonctions caractéristiques

Définition 21 : La fonction caractéristique de X est la transformée de Fourier : $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

III.5 [Bale]

Exemple 22 : Si X est de densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx = \mathcal{F}(f)(t)$

Théorème 23 : La fonction caractéristique caractérise la loi i.e. $\varphi_X = \varphi_Y$ ssi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Exemples 24 : (1) Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, alors $\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$

(2) Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Théorème 25 : Soit X v.a. réelle de fonction caractéristique φ_X

Alors : (1) Si $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$, alors φ est n-fois dérivable de dérivées :

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} d\mathbb{P}_X(x) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$$

(2) Réciproquement, si n est pair, φ n-fois dérivable en 0, alors : X admet tout moment d'ordre $k \leq n$

III.5 [Bale]

3] Fonctions génératrices

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 26 : La fonction génératrice de X est :

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) s^n$$

Exemple 27 : Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$, alors $G_X = (sp + 1 - p)^n$

Théorème 28 : G_X est continue sur $[-1;1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$

[Ouv1]

Corollaire 29 : G_X caractérise la loi de X i.e. $G_X = G_Y$ ssi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Théorème 30 : $X \in L^k$ ssi G_X est k-fois dérivable à gauche en 1

Dans ce cas, pour $k = 1$, $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.

III] Lois de vecteurs aléatoires et convergence en loi.

1] Lois conjointes et marginales

On considère X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$: $X = (X_1; \dots; X_d)$

Définition 31 : La fonction de répartition de X est :

$F_X(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1; \dots; X_d \leq t_d)$. La loi de X_i est appelée i-ème loi marginale de X : $F_{X_i}(t_i) = \lim_{\substack{t_j \to +\infty \\ j \neq i}} F_X(t)$

III.3 [Bale]

Exemple 32 : Si $X = (X_1; X_2)$ est de loi discrète concentrée sur les points $(-1;0); (0;1); (0;-1); (1;0)$ tous de probabilités $\frac{1}{4}$; alors : $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} = \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_1$

III.3 [Bale]

Proposition 33 : Si $X=(X_1;X_2)$ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, alors X_1 et X_2 sont de densités : $f_1(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x;y)\,dy$ et $f_2(y)=\int_{\mathbb{R}} f(x;y)\,dx$.

Exemple 34 : Si $f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$, alors : $X_i \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Théorème 35 : La fonction de répartition de X caractérise la loi de X i.e. $F_X=F_Y$ ssi $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$

2) Convergence en loi de suites de variables aléatoires

Soit (X_n) suite de variables aléatoires.

IV.4 [Bale]

Définition 36 : On dit que (X_n) converge en loi vers X si : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[+\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$

On note $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$.

Théorème 37 : (de Lévy) $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ ssi $\forall t\in\mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[+\infty]{} \Phi_X(t)$

Théorème 38 : $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ ssi pour tout point de continuité t de F_X, on a : $F_{X_n}(t) \xrightarrow[+\infty]{} F_X(t)$

[Bale]

Exemple 39 : Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n;\frac{\lambda}{n})$, alors la suite (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 40 : Si (X_n) et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$,
Alors : $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ ssi : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n=k) \xrightarrow[+\infty]{} \mathbb{P}(X=k)$

Proposition 41 : Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue.
Alors : $f(X_n) \xrightarrow[+\infty]{loi} f(X)$

[Les]

Lemme 42 : Soit $(b_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq : $b_n \xrightarrow[+\infty]{} b$ et $a\in[0;1[$
Alors : pour toute suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b_n$, (u_n) converge

[Les]

Application 43 : Soit $p\in]0;1[$, (ξ_n) v.a. de même loi $\xi_0\sim\mathcal{B}(1;p)$ (U_n) v.a. de même loi $U_0\sim\mathcal{U}([0;1])$ telles que toutes les v.a. sont indépendantes. Soit $X_0=x\in[0;1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=U_nX_n+\xi_n(1-U_n)$
Alors : la suite (X_n) converge en loi vers une loi Béta de paramètres p et $1-p$: $\mathcal{B}(p;1-p)$.

3) Lien avec les autres types de convergence

IV.4 [Bale]

Proposition 44 : Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow{loi} X$

Corollaire 45 : La convergence presque sûre et les convergences L^p impliquent la convergence en loi.

Contrexemple 46 : Soit $X\sim\mathcal{N}(0;1)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=(-1)^nX$.
$X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ mais $X_n \not\xrightarrow[+\infty]{ps} X$ ni $X_n \not\xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$.

[Ber]

Lemme 47 : Soit X v.a. réelle $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée.
Alors : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)]\leq \exp(\frac{t^2}{2})$

Théorème 48 : (Inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) v.a. réelles indépendantes bornées p.s. et centrées telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists c_n>0 \mid |X_n|\leq c_n$ et soit $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$.
Alors : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

Application 49 : Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $\beta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$
Alors : $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$. En particulier, $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[+\infty]{loi} 0$.

Références :

[Bale] Probabilité — Barbe

[Ouv1] Probabilités 1 — Ouvrard

[Les] 131 développements pour l'oral — Lesesvre

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques — Bernis